Compito di geometria e algebra lineare del 26 giugno 2022

Istruzioni: Avete 2 ore e 30' di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia A una matrice reale 3×3 invertibile. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determina se è vera o falsa fornendo una motivazione: se l'affermazione è vera scrivi una dimostrazione, se è falsa fornisci un controesempio (in cui scegli A esplicitamente).

(1) A ha sempre almeno un autovettore.
(2) A è sempre diagonalizzabile.
(3) Se $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ è una base di autovettori per A, allora v_1, v_2, v_3 è base di autovettori per A^{-1}.

Esercizio 2. Considera il sottospazi di $\mathbb{R}^4$ seguenti:

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$W = \{x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \quad x_1 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

(1) Determina delle basi per $U + W$ e $U \cap W$.
(2) Determina un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus Z = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Definiamo la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considera il prodotto scalare sullo spazio $M(2)$ delle matrici reali 2×2 definito da

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^{\text{t}}ASB)$$

per ogni $A, B \in M(2)$. Determina la segnatura di questo prodotto scalare su $M(2)$.

Esercizio 4. Siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette sghembe, che hanno distanza 1, e le cui giaciture sono ortogonali. Siano $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispettivamente le riflessioni lungo le rette r e s. Determina il tipo di isometria della composizione $g \circ f$.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Vero. Il polinomio caratteristico ha grado dispari, quindi esiste almeno un autovalore, quindi esiste almeno un autovettore.
(2) Falso. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Vero. Se $A(v_i) = \lambda_i v_i$, allora $A^{-1}(\lambda_i v_i) = v_i$ e quindi per linearità $A^{-1}(v_i) = 1/\lambda_i v_i$. Quindi v_i è autovettore per A^{-1} con autovalore $1/\lambda_i$, per ogni i.

Esercizio 2.

(1) Inserendo il vettore generico di U nelle equazioni che descrivono W si ottiene con pochi passaggi che $U \cap W$ è generato dal vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula di Grassmann si deduce che $\dim(U + W) = 3$. Si ottiene quindi una base di $U + W$ aggiungendo ad una base di U un qualsiasi vettore di W che non stia in U. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Ad esempio $Z = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$. Si verifica che $U \oplus Z = \mathbb{R}^4$ calcolando il determinante della matrice 4×4 formata da due vettori che generano U e i due vettori scelti e_1, e_2. Il determinante non si annulla, quindi i 4 vettori sono indipendenti.

Esercizio 3. La matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha determinante 1. Le possibili segnature sono $(4, 0, 0), (0, 4, 0), (2, 2, 0)$. Ci sono elementi nulli sulla diagonale, quindi non può essere definita, e l'unica possibilità è $(2, 2, 0)$.

Esercizio 4. Possiamo fissare un sistema di riferimento in cui

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Con queste rette si ottiene

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 2 - z \end{pmatrix}.$$

Componendo si vede che

$$g \left(f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z + 2 \end{pmatrix}$$

è una rototraslazione avente come asse la retta perpendicolare a r e s, come angolo π, e come passo 2.